Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

3 martie 2007

CLASA A X-A, SOLUTII SI BAREMURI

Subiectul 1. Fie numerele reale a, b, c astfel încât $a, b, c \in (1, \infty)$ sau $a, b, c \in (0, 1)$. Arătaţi că

$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b)$. **Soluţie şi barem.** Alegem o bază d amplasată în acelaşi interval ca şi a, b, c; logaritmând în baza d inegalitatea se reduce la

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq \frac{4x}{y+z} + \frac{4y}{z+x} + \frac{4z}{x+y},\ \forall x, y, z > 0 \ldots\ldots \mathbf{2\ p}$$

Pentru aceasta, este suficient să arătăm că $\frac{z}{x} + \frac{z}{y} \geq 4\frac{z}{x+y}$. .... **3 p**

Aceasta se reduce la inegalitatea dintre media aritmetică a numerelor $1/x, 1/y$ şi cea armonică, deci este adevărată.................................... **2 p**

Subiectul 2. Cele $2n$ pătrăţele ale unui dreptunghi de dimensiuni $2 \times n$ se colorează cu trei culori. Spunem că o anumită colorare are o *tăietură* dacă pe una din cele n coloane avem două pătrate de aceeaşi culoare. Să se determine:

a) numărul colorărilor fără tăieturi;

b) numărul colorărilor cu o singură tăietură.

Soluţie şi barem. a) Culorile de pe prima linie pot fi alese în 3^n moduri **2 p**

O colorare corespunde unei alegeri a culorilor de pe prima linie, combinată cu o alegere adecvată a culorilor pe linia a doua. Pentru fiecare alegere a culorilor de pe prima linie există câte 2^n alegeri ale culorilor de pe linia a doua. Obţinem astfel $3^n 2^n = 6^n$ colorări .... **2 p**

b) O colorare cu o singură tăietură corespunde alegerii culorilor de pe prima linie, a coloanei pe care avem tăietura şi a culorilor de pe celelalte coloane. Aceasta se poate face în $3^n \cdot n \cdot 2^{n-1} = 3n \cdot 6^{n-1}$ moduri ...... **3 p**

Subiectul 3. Fie ABC un triunghi fixat, de laturi $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Pentru fiecare dreaptă Δ din planul triunghiului notăm cu

d_A, d_B, d_C distanţele de la A, B, C la Δ şi considerăm expresia

$$E(\Delta) = ad_A^2 + bd_B^2 + cd_C^2.$$

Demonstraţi că dacă valoarea lui $E(\Delta)$ este minimă atunci Δ trece prin centrul cercului înscris în triunghi.

Soluţie şi barem. Arătăm că dacă Δ nu trece prin centrul I al cercului înscris, Δ' trece prin I şi $\Delta' \parallel \Delta$ atunci $E(\Delta') < E(\Delta)$ .... **2 p**
Notăm A_1, B_1, C_1, I_1 proiecţiile punctelor A, B, C, I pe Δ şi A', B', C' proiecţiile lui A, B, C pe Δ'. Avem

$$(d_A)^2 - (d'_A)^2 = AA_1^2 - AA'^2 = (AI_1^2 - A_1I_1^2) - (AI^2 - A'I^2) = AI_1^2 - AI^2$$

şi analoagele. Dacă definim $f(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2$ pentru un punct oarecare M din plan, obţinem $E(\Delta) - E(\Delta') = f(I_1) - f(I)$ .... **1 p**
Apoi, pentru un punct O oarecare,

$$\begin{aligned} f(M) &= a(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})^2 + b(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})^2 + c(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM})^2 \\ &= a\overrightarrow{OA}^2 + b\overrightarrow{OB}^2 + c\overrightarrow{OC}^2 - 2\overrightarrow{OM}(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}) + (a+b+c)\overrightarrow{OM}^2 \\ &= a\overrightarrow{OA}^2 + b\overrightarrow{OB}^2 + c\overrightarrow{OC}^2 - 2\overrightarrow{OM}(a+b+c)\overrightarrow{OI} + (a+b+c)\overrightarrow{OM}^2 \\ &= a\overrightarrow{OA}^2 + b\overrightarrow{OB}^2 + c\overrightarrow{OC}^2 - (a+b+c)\overrightarrow{OI}^2 + (a+b+c)\overrightarrow{IM}^2, \end{aligned}$$ ...... **2 p**

unde am folosit $\overrightarrow{OI} = \dfrac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$ .... **1 p**
Pentru $O = I$ obţinem $f(M) = (a+b+c)IM^2 + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2$, deci $E(\Delta) - E(\Delta') = f(I_1) - f(I) = (a+b+c)II_1^2 > 0$ .... **1 p**

Subiectul 4. Fie u, v, w trei numere complexe de modul 1. Arătaţi că există o alegere a semnelor $+$ şi $-$ astfel încât

$$|\pm u \pm v \pm w| \leq 1.$$

Soluţie şi barem. Notăm cu literă mare punctul având ca afix litera mică omoloagă. Atunci, din relaţia lui Sylvester rezultă că $u + v + w$ este afixul ortocentrului H al triunghiului UVW .... **2 p**
În cazul în care triunghiul UVW este ascuţitunghic sau dreptunghic alegem toate semnele $+$ şi problema este rezolvată, deoarece H este în interiorul triunghiului UVW, deci în interiorul cercului circumscris .... **2 p**
În caz contrar, un unghi al triunghiului este obtuz, de exemplu W. Atunci, pentru $w' = -w$, obţinem triunghiul ascuţitunghic UVW' şi folosim acelaşi argument ca mai sus pentru $\triangle UVW'$ .... **3 p**